

Санкт-Петербургский государственный университет

Кафедра прикладной кибернетики

Гайшун Артем Александрович

Существование периодических решений в
ОДУ с нелинейностью
упруго-пластического типа

Магистерская диссертация

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., профессор Райтманн Ф.

Рецензент:
к. ф.-м. н., инженер Слепухин А. С.

Санкт-Петербург
2017

SAINT-PETERSBURG STATE UNIVERSITY

Chair of applied cybernetics

Artem Gaishun

Existence of periodic solutions in ODE with nonlinearities of elastoplastic type

Master's Thesis

Scientific supervisor:
Doctor of Science, Professor Reitmann V.

Reviewer:
Ph.D., engineer Slepukhin A. S.

Saint-Petersburg
2017

Оглавление

Введение	5
Цели и задачи	7
1. Нелинейности упруго-пластического типа	8
1.1. Предварительные сведения	8
1.2. Модель упруго-пластического осциллятора	8
1.3. Дифференциальное уравнение осциллятора	9
1.4. Гистерезисные нелинейности	10
1.5. Задание нелинейности через дифференциальное включение	11
2. Дифференциальные включения	15
2.1. Предварительные сведения	15
2.2. Представление упруго-пластического осциллятора в виде дифференциального включения	15
2.3. Существование решения дифференциального включения с выпуклой правой частью	17
3. Монотонные операторы	20
3.1. Основные определения	20
3.2. Монотонность правой части системы с гистерезисом . . .	20
4. ОДУ с гистерезисной нелинейностью	24
4.1. Постановка задачи	24
4.2. Теорема о существовании решения	24
5. ОДУ с неавтономными коэффициентами	27
5.1. Некоторые определения из теории коциклов	27
5.2. Условия частотной теоремы	28
5.3. Частотная теорема и ее приложение к существованию пе- риодических решений	34

6. Применение метода усреднения к поиску периодических решений	35
6.1. Подготовка к применению метода	35
6.2. Получение системы коэффициентов	35
6.3. Эксперименты	37
Заключение	39
Исходные коды	40
Список литературы	43

Введение

В работе будут рассматриваться обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка вида:

$$\ddot{x} + c_0 \dot{x} + \sigma(x) = f(t),$$

где $x \in \mathbb{R}$ – общее перемещение вследствие деформации, $\sigma(x)$ – упруго-пластическая восстанавливающая сила (нелинейность упруго-пластического типа), $f(t)$ – внешняя сила. Известно, что такие уравнения описывают один класс упруго-пластических деформаций [1].

При приложении силы к телу оно может деформироваться, при этом разделяют два разных вида деформаций. Деформация называется упругой, если она исчезает после удаления вызвавшей её нагрузки (то есть тело возвращается к первоначальным размерам и форме), и пластической, если после снятия нагрузки деформация не исчезает (или исчезает не полностью). Рассмотрим декомпозицию перемещения x на упругую и пластическую части:

$$x = x^e + x^p,$$

где x^e – упругая часть деформации, x^p – пластическая часть. Тогда нелинейность можно представить в следующем виде:

$$\sigma(x) = K(x - x^p),$$

где $K \in \mathbb{R}$ – коэффициент жесткости.

В первой главе работы представлены два различных способа представления упруго-пластической нелинейности, а именно гистерезис и дифференциальное включение, а также приведен пример задания упруго-пластического осциллятора.

Во второй главе рассматривается представление упруго-пластического осциллятора в виде дифференциального включения, а также приводится теорема существования решения для дифференциального включения.

В третьей главе представлены элементы теории монотонных операторов.

ров и ее приложение к задаче нахождения решений ОДУ с упруго-пластической нелинейностью.

В четвертой главе рассматриваются ОДУ с гистерезисными нелинейностями и теорема существования решения ОДУ с такой нелинейностью, которая позволяет установить существование решения в случае, например, билинейного гистерезиса.

В пятой главе используются элементы теории коциклов для получения условий частотной теоремы в случае неавтономной системы. С ее помощью становится возможным сделать вывод о существовании периодических решений в неавтономной системе.

В шестой главе рассматривается метод усреднения для численного построения периодических решений ОДУ с гистерезисной нелинейностью и проводятся эксперименты над коэффициентами ОДУ.

Цели и задачи

Целью данной работы является изучение обыкновенных дифференциальных уравнений с нелинейностями упруго-пластического типа. Необходимо решить ряд задач, а именно:

1. Рассмотреть различные способы описания нелинейности упруго-пластического типа;
2. Найти условия существования решений ОДУ с упруго-пластической нелинейностью;
3. Выполнить поиск условий существования периодических решений для ОДУ упруго-пластического типа;
4. Описать численный алгоритм нахождения периодического решения для ОДУ упруго-пластического типа и провести эксперименты.

1. Нелинейности упруго-пластического типа

В этой главе будут приведены способы задания нелинейностей упруго-пластического типа, а также рассмотрен пример упруго-пластического осциллятора.

1.1. Предварительные сведения

Упруго-пластическая теория описывает поведение тела под напряжением σ , которое имеет упругое поведение до упругого предела, который определяется поверхностью текучести. После этого предела возникают пластические деформации, которые не исчезают (или исчезают не полностью) после снятия нагрузки.

При повторной нагрузке часто обнаруживается повышение предела упругости материала, называемое упрочнением. Феномен упрочнения изменяет поверхность текучести, смещая ее (кинематическое упрочнение) и/или однородно расширяя (изотропное упрочнение).

1.2. Модель упруго-пластического осциллятора

В этом параграфе будет описана модель одномерного осциллятора, использованная в работе [1]. Модель предполагает аддитивную декомпозицию деформации, т.е. общее перемещение x может быть разделено на упругую часть x^e и пластическую часть x^p следующим образом:

$$x = x^p + x^e. \quad (1.1)$$

Далее, зависимость между напряжением и перемещением задается равенством

$$\sigma = K(x - x^p), \quad (1.2)$$

где K – коэффициент жесткости.

Введем внутренние переменные α и β , описывающие феномен упрочнения. При этом α описывает изотропное упрочнение и называется

внутренней переменной упрочнения. Ее можно задать следующим образом:

$$\dot{\alpha} = |\dot{x}^p|. \quad (1.3)$$

Кинематическое упрочнение описывается внутренней переменной β , которая называется обратной переменной нагрузки и описывается равенством

$$\dot{\beta} = H_K \dot{x}^p, \quad (1.4)$$

где H_K – кинематический параметр упрочнения.

Если задана скорость пластического перемещения γ , то пластическое перемещение x^p можно задать так:

$$\dot{x}^p = \gamma \text{sign}(\sigma - \beta). \quad (1.5)$$

Поверхность текучести, которая определяет границу между областями упругих и пластических деформаций, задается следующим образом:

$$h(\sigma, \alpha, \beta) = |\sigma - \beta| - (\sigma_T + H_I \alpha), \quad (1.6)$$

где H_I – модуль пластичности, а σ_T – напряжение, которое изначально необходимо применить, чтобы поведение сменилось на пластическое. Формула (1.6) учитывает сдвиг поверхности текучести ($|\sigma - \beta|$) и ее расширение $(\sigma_T + H_I \alpha)$.

Необратимый характер пластической деформации возможно представить с помощью следующих условий:

$$\gamma \geq 0, \gamma h(\sigma, \alpha, \beta) = 0, \gamma \dot{h}(\sigma, \alpha, \beta) = 0, \quad \text{если} \quad h(\sigma, \alpha, \beta) = 0. \quad (1.7)$$

1.3. Дифференциальное уравнение осциллятора

Рассматриваем осциллятор с одной степенью свободы, массой m и внешним линейным параметром вязкой диссипации c . Тогда уравнение выражается следующим образом:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \sigma(x, x^p, \alpha, \beta) = f(t), \quad (1.8)$$

где $\sigma(x, x^p, \alpha, \beta)$ - упруго пластическая восстанавливающая сила осциллятора, $f(t)$ - внешняя сила. Запишем ОДУ (1.8) в виде системы. Рассмотрим $x_1 = x, \dot{x}_1 = x_2$. Используя (1.2)–(1.7), получим:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \quad \dot{x}_2 = \frac{f(t)}{m} - c_0 x_2 - \omega_0^2 (x_1 - x_1^p), \\ \dot{x}_1^p &= \gamma \text{sign}(\sigma - \beta), \quad \dot{\alpha} = \gamma, \quad \dot{\beta} = \gamma H_K \text{sign}(\sigma - \beta), \\ h(\sigma, \alpha, \beta) &= |\sigma - \beta| - (\sigma_T + H_I \alpha), \quad \gamma \geq 0, \\ \gamma h(\sigma, \alpha, \beta) &= 0, \quad \gamma \dot{h}(\sigma, \alpha, \beta) = 0, \quad \text{если } h(\sigma, \alpha, \beta) = 0, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где $c_0 = c/m, \omega_0^2 = K/m$.

Если рассматривать $y = (x_1, x_2, x_1^p, \alpha, \beta)$, то система (1.9) принимает вид $\dot{y} \in F(y)$, где $y \in \mathbb{R}^5$, учитывая дополнительные условия (1.7). В данном случае $F : \mathbb{R}^5 \rightarrow P(\mathbb{R}^5)$ - многозначная функция, где $P(\mathbb{R}^5)$ - множество всех непустых подмножеств. Более подробно эта система будет обсуждаться в следующей главе.

1.4. Гистерезисные нелинейности

В предыдущем параграфе был рассмотрен пример описания упруго-пластической нелинейности. В дальнейшем будет часто использоваться иной вариант задания – билинейный гистерезис [2], изображенный на рис. 1. Вообще говоря, гистерезис часто встречается в задачах, связанных с упруго-пластическими деформациями, а также во многих других, например [3].

Угол ψ на рис. 1 задается параметром билинейного гистерезиса μ следующим образом:

$$\alpha = \tan^{-1}(1 - \mu). \quad (1.10)$$

Заметим, что при $\mu \rightarrow 0$ имеем $\sigma \rightarrow x$. Таким образом, чем меньше μ , тем тело имеет более упругое поведение. Необходимо также отметить, что гистерезис имеет свойство зависимости от предыдущих состояний. Для того, чтобы по рис. 1 определить значение σ по значению x , необходимо знать поведение системы в прошлом.

Например, зафиксируем $x_0 = 2$, что показано на рисунке пунктирной линией. Легко видеть, что на рис. 1 такому x_0 соответствует два значе-

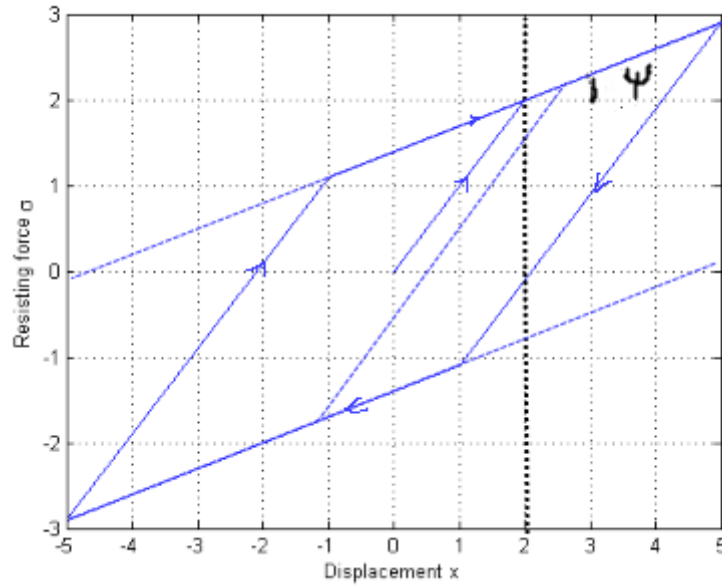


Рис. 1: Билинейный гистерезис с максимальной амплитудой $R = 5$

ния σ , а именно $\sigma_1 = 2$ и $\sigma_2 = 0$. Однако возможны и любые значения из промежутка $[0, 2]$, так как перемещение x может начать уменьшаться в любой точке из промежутка $[2, 5]$. Какое значение выбрать для $x_0 = 2$ в конкретном случае, зависит от прошлого системы.

Таким образом, можно заметить, что билинейный гистерезис, вообще говоря, – многозначная функция.

1.5. Задание нелинейности через дифференциальное включение

В этом параграфе будет рассмотрен способ задания нелинейности упруго-пластического типа через субдифференциал, который рассмотрен в книге [4]. Он отличается от способа задания с помощью гистерезиса, рассмотренного в предыдущем параграфе тем, что пластическое перемещение задается субдифференциалом произвольной выпуклой функции.

Определение 1.5.1. Пусть $(E, (\cdot, \cdot))$ - гильбертово пространство. Субдифференциалом $\partial f(x_0)$ выпуклой функции $f : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ в точке

x_0 называется множество $\{w|w \in E\}$:

$$f(x_0 + \eta) \geq f(x_0) + (w, \eta), \quad (1.11)$$

где $\eta \in E$.

Рассмотрим нелинейность типа

$$x(t) \in \partial g(\sigma(t)) \quad (1.12)$$

для п.в. $t \in [0, t_0], t_0 \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим пример, который часто встречается при моделировании задач упруго-пластического типа.

Пример 1.5.1. Зафиксируем $E = \mathbb{R}, \sigma_0 > 0$.

$$C = \{\sigma \in \mathbb{R} : |\sigma| \leq \sigma_0\}$$

Пусть χ - индикаторная функция множества C , т.е. $\chi(\sigma) = 0$, если $\sigma \in C$, иначе $\chi(\sigma) = +\infty$.

Предложение 1.5.1. Тогда

$$\partial\chi(\sigma) = \begin{cases} 0, & |\sigma| < \sigma_0, \\ \mathbb{R}_\pm, & \sigma = \pm\sigma_0, \\ \emptyset, & |\sigma| > \sigma_0. \end{cases}$$

Доказательство. 1. В случае, когда $|\sigma| < \sigma_0$, $\chi(\sigma) = 0$ и условие (1.11) будет записано следующим образом:

$$\chi(\sigma + \eta) \geq (w, \eta) \quad (1.13)$$

для произвольных $\eta \in \mathbb{R}$. Заметим, что левая часть неотрицательна и равна нулю тогда и только тогда, когда $|\sigma + \eta| \leq \sigma_0$. В таком случае очевидно, что $w = 0$ – единственное решение (1.13).

2. Рассмотрим $\sigma = \sigma_0$. В таком случае условие (1.11) примет следующий вид:

$$\chi(\sigma_0 + \eta) \geq (w, \eta) \quad (1.14)$$

для произвольных $\eta \in \mathbb{R}$. Заметим, что левая часть неравенства (1.14) равна нулю, если $\eta \in [-2\sigma_0, 0]$. В таком случае решением (1.14) будут $w \in \mathbb{R}_+$.

3. Рассмотрим $\sigma = -\sigma_0$. Неравенство (1.11) принимает вид:

$$\chi(-\sigma_0 + \eta) \geq (w, \eta) \quad (1.15)$$

для произвольных $\eta \in \mathbb{R}$. Левая часть неравенства (1.15) равна нулю при $\eta \in [0, 2\sigma_0]$. Тогда (1.15) имеет место при $w \in \mathbb{R}_-$.

4. Наконец, $|\sigma| > \sigma_0$. Условие (1.11) принимает вид:

$$\chi(\sigma + \eta) \geq +\infty + (w, \eta) \quad (1.16)$$

для произвольного $\eta \in \mathbb{R}$. Такого $w \in \mathbb{R}$ не существует. □

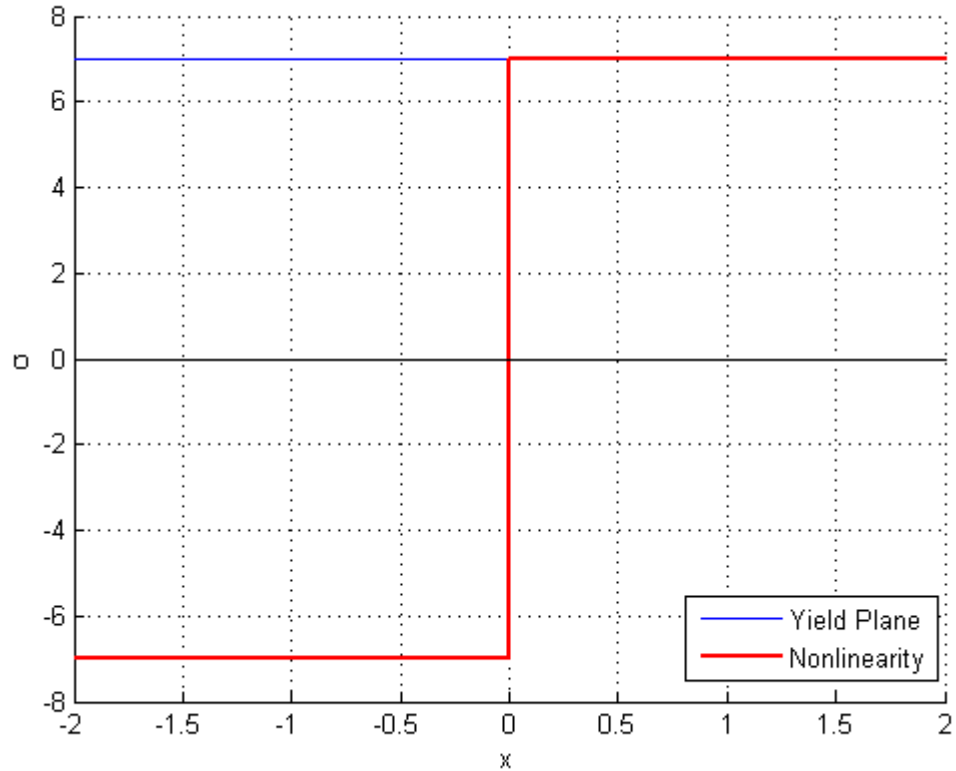


Рис. 2: Нелинейность из примера 1.5.1, где $\sigma_0 = 7$

На рис. 2 изображена нелинейность из примера 1.5.1. Такая функция χ обычно возникает в задачах моделирования идеально-жестко-

пластического стержня, т.е. в случае, когда упругие деформации отсутствуют до поверхности текучести. Однако с помощью (1.12) можно моделировать и другие случаи упруго-пластических нелинейностей. В следующих главах будет подробно рассмотрен вопрос существования решений ОДУ с нелинейностями упруго-пластического типа, в том числе вида (1.12).

2. Дифференциальные включения

В этой главе будут рассматриваться условия существования решений дифференциальных включений и их применение к упруго-пластическим задачам.

2.1. Предварительные сведения

В этой главе будут рассматриваться дифференциальные включения вида

$$\dot{y} \in F(t, y), \quad (2.1)$$

где $y \in \mathbb{R}^n$, F – многозначная функция, т.е. $F(t, y) \subset \mathbb{R}^n$ для всех $t \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^n$.

Такое представление системы с нелинейностью упруго-пластического типа удобно в случае, когда пластическая деформация описывается включением (1.12), но его можно использовать и для описания систем вида (1.9).

2.2. Представление упруго-пластического осциллятора в виде дифференциального включения

В качестве примера рассмотрим систему (1.9) и представим ее в виде дифференциального включения.

Рассмотрим

$$y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1^p \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

где $\dot{x}_1 = x_2$, $x_1 = x_1^e + x_1^p$, β и α – параметры упрочнения. Напомним, что поверхность текучести определяется функцией

$$h(\sigma, \alpha, \beta) = |\sigma - \beta| - (\sigma_T + H_I \alpha),$$

где $\sigma = K(x_1 - x_1^p)$, $\sigma_T, H_I \in \mathbb{R}$. Рассмотрим функцию, описывающую скорость пластической деформации

$$\gamma(\sigma, \beta, \alpha) = \begin{cases} \gamma_0, & h(\sigma, \alpha, \beta) = 0, \dot{h}(\sigma, \alpha, \beta) = 0, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (2.3)$$

где $\gamma_0 \in \mathbb{R}$ – фиксированная скорость пластической деформации. Рассмотрим следующую функцию:

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ [-1, 1], & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Функция (2.4) изображена на рис.3.

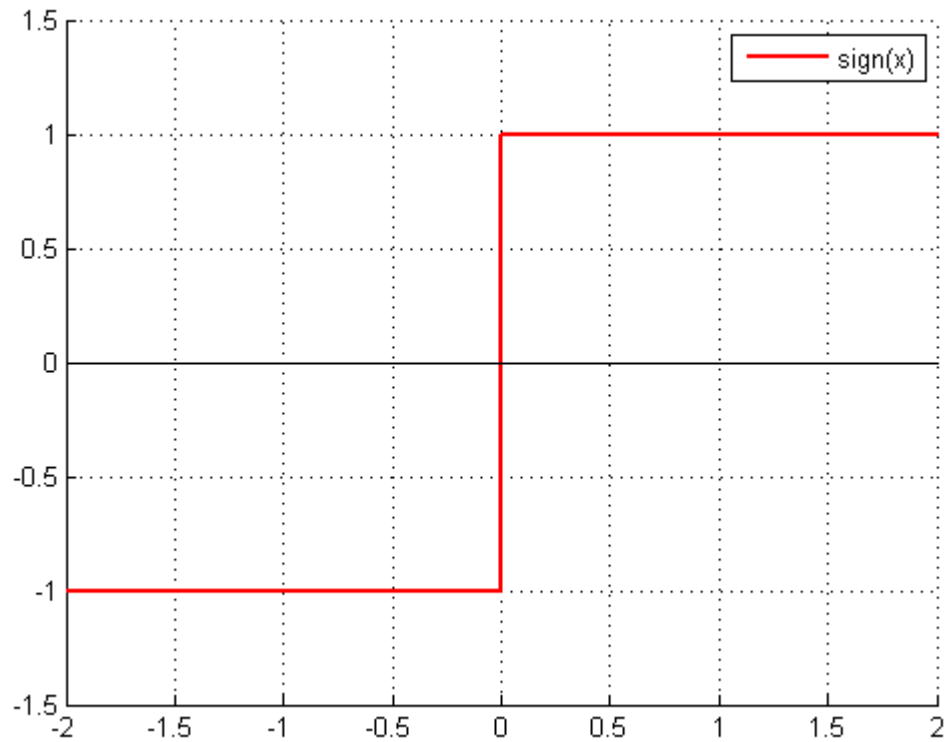


Рис. 3: Многозначная функция $\text{sign}(x)$

Наконец, рассмотрим правую часть системы (1.9)

$$F(t, y) = \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{f(t)}{m} - c_0 x_2 - \omega_0^2 (x_1 - x_1^p) \\ \gamma(\sigma, \beta, \alpha) \text{sign}(\sigma - \beta) \\ \gamma(\sigma, \beta, \alpha) H_K \text{sign}(\sigma - \beta) \\ \gamma(\sigma, \beta, \alpha) \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

где y из (2.2), $\gamma(\sigma, \beta, \alpha)$ из (2.3), $f(t)$ – внешнее возмущение, $m, \omega_0, H_K \in \mathbb{R}$ – параметры системы. таким образом мы получаем возможность записать систему (1.9) в виду дифференциального включения

$$\dot{y} \in F(t, y), \quad (2.6)$$

где y из (2.2), F из (2.5).

2.3. Существование решения дифференциального включения с выпуклой правой частью

В этом параграфе обсуждаются некоторые элементы теории существования решения дифференциального включения. Более подробные результаты можно найти в работе [5].

Определение 2.3.1. Пусть Φ - многозначное отображение, определенное на $D \subset \mathbb{R}^m$, $F(p) \subset \mathbb{R}^n, \forall p \in D$. Многозначное отображение Φ называется полунепрерывным сверху в точке p_0 , если для любого открытого множества $V \subset \mathbb{R}^n$ такого, что $\Phi(p_0) \subset V$, существует окрестность $U(p_0)$ точки p_0 такая что:

$$\Phi(p) \subset V \quad (2.7)$$

для всех $p \in U(p_0)$

Теорема 2.3.1. Пусть отображение $\Phi(t, y)$ удовлетворяет в области $G \subset \mathbb{R}^m$ следующим условиям:

1. Множество $\Phi(t, y)$ является выпуклым и компактным для любых $(t, y) \in G$.
2. Многозначное отображение $\Phi(t, y)$ полунепрерывно сверху в области G .

Тогда для любой точки $(t_0, y_0) \in G$ существует решение задачи Коши

$$\dot{y} \in \Phi(t, y), y(t_0) = y_0, \quad (2.8)$$

определенное на некотором отрезке $[t_0, t_0 + d]$.

Теорема 2.3.2. Любое решение задачи (2.8) может быть продолжено на правый максимальный промежуток существования.

Рассмотрим применение теоремы 2.3.1 к упруго-пластическому осциллятору в форме дифференциального включения (2.5), (2.6), рассмотренному в предыдущем параграфе. Покажем, что оба условия выполнены.

Предложение 2.3.1. Правая часть упруго-пластического осциллятора (2.5) удовлетворяет обоим условиям теоремы 2.3.1.

Доказательство. 1. $\gamma(\sigma, \beta, \alpha)$ принимает значения 0 или $\gamma_0 \cdot \text{sign}(\sigma - \beta)$ в точке 0 имеет значение $[-1, 1]$. Этот отрезок является выпуклым и компактным. В остальных точках (2.5) не является многозначной функцией, поэтому требования выполнены очевидно.

2. Рассмотрим sign в $p_0 = 0$. Заметим, что $\text{sign}(p_0) = [-1; 1]$. Так как $1 \in [-1; 1]$ и $-1 \in [-1; 1]$, условие полунепрерывности сверху для sign выполнено очевидно. Также отметим, что по построению γ также полунепрерывен сверху. Таким образом (2.5) полунепрерывна сверху. \square

Рассмотрим далее случай, когда пластическое течение, а значит и нелинейность, задается в виде (1.12).

Предложение 2.3.2. Пусть D – открытое выпуклое подмножество \mathbb{R} , $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ – выпуклая функция, определенная на D .

Тогда дифференциальное включение, описывающее упруго пластическую систему с пластическим течением, задаваемым в виде (1.12), имеет решение в смысле теоремы 2.3.1.

Доказательство. Достаточно воспользоваться теоремой 2.3.1. Из теории выпуклых функции известно, что в условиях предложения, $\partial g(x)$ – полунепрерывное сверху многозначное отображение с выпуклыми компактными значениями, что и является условием теоремы. \square

Существуют иные теоремы существования решения дифференциального включения, которые не имеют условия выпуклости правой части. В работе [6] рассмотрен вопрос существования решения в случае, когда правая часть удовлетворяет условию Липшица.

3. Монотонные операторы

В этой главе будут рассмотрены элементы теории монотонных операторов и их приложение к поиску условий существования решений ОДУ с нелинейностями упруго-пластического типа.

3.1. Основные определения

Предположим, что $(E, (\cdot, \cdot))$ - вещественное гильбертово пространство, $P(E)$ - совокупность всех непустых подмножеств пространства E .

Определение 3.1.1. Оператор $\Phi: E \rightarrow P(E)$ называется монотонным, если для всех $y_1, y_2 \in E$ и для всех $w_1 \in \Phi(y_1), w_2 \in \Phi(y_2)$ выполнено $(w_1 - w_2, y_1 - y_2) \geq 0$.

Определение 3.1.2. Монотонный оператор $\Phi: E \rightarrow P(E)$ называется максимально монотонным, если $R(\lambda I + \Phi) = E$ для любых $\lambda > 0$,

где $R(\Phi)$ - область значений оператора Φ .

Рассмотрим теорему, которая доказывает существование и единственность решения дифференциального включения с максимально монотонной правой частью (см. [7, 8, 9]).

Теорема 3.1.1. Пусть $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow P(\mathbb{R}^n)$, где Φ - максимально монотонный оператор. Тогда для всех y_0 существует единственная функция $y: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ такая, что:

1. $y(0) = y_0$;
2. y удовлетворяет на $[0, +\infty)$ условию Липшица;
3. $\dot{y}(t) \in F(y(t))$ почти везде на $[0, +\infty)$.

3.2. Монотонность правой части системы с гистерезисом

Рассмотрим способ задания нелинейности упруго-пластического типа σ с помощью билинейного гистерезиса (см. параграф 1.4) как на

рис.4. Рассмотрим также систему уравнений

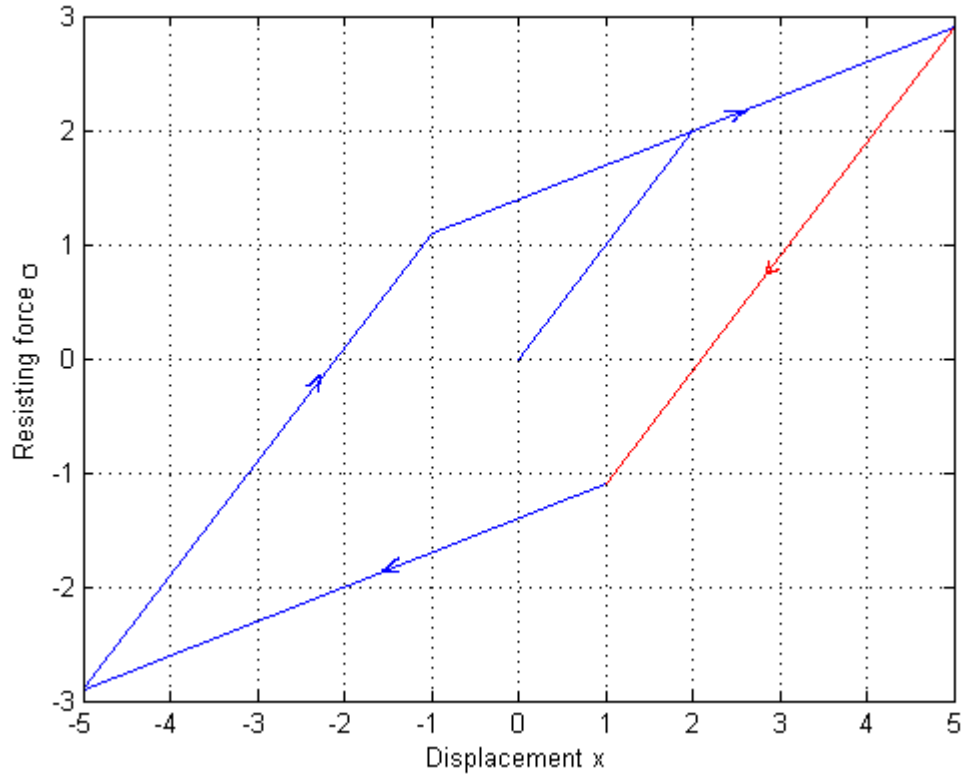


Рис. 4: Билинейный гистерезис

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\sigma(x_1), \end{cases} \quad (3.1)$$

где $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Обозначим ее правую часть F . Рассмотрим условие монотонности последовательно на сторонах четырехугольника на рис.4, начав с выделенной красным цветом. Заметим, что в рассматриваемом случае оператор не будет многозначным. Положим

$$y_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad y_2 = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Также рассмотрим стандартное скалярное произведение на \mathbb{R}^2 . Тогда

$$(y_1 - y_2, F(y_1) - F(y_2)) = 0, \quad (3.3)$$

так как $\sigma(x_2) - \sigma(x_1) = x_2 - x_1$, вследствие отсутствия пластической деформации на этой области нелинейности. Рассмотрим иную область,

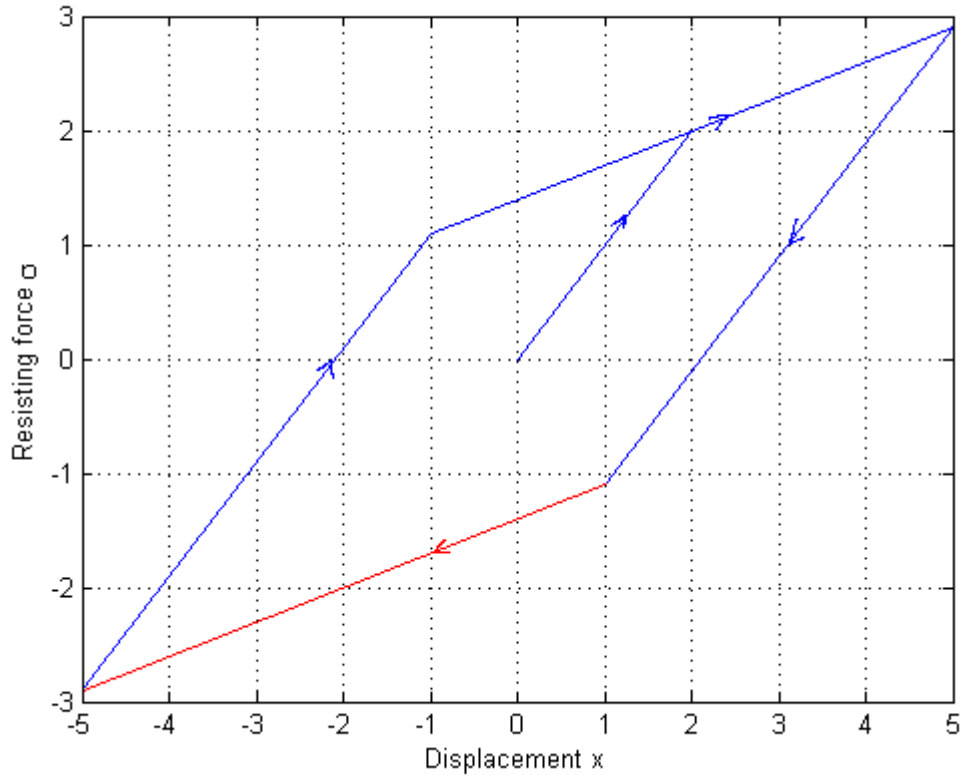


Рис. 5: Билинейный гистерезис

выделенную на рис.5. Положим

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1 - \mu) \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

где μ – параметр билинейного гистерезиса(см. параграф 1.3). Эта матрица симметрична, положительно-определена, следовательно $\forall w_1, w_2 \in E$ зададим скалярное произведение следующим образом:

$$(w_1, w_2) = \frac{1}{2}(Q(w_1 + w_2) - Q(w_1) - Q(w_2)), \quad (3.5)$$

где $Q(w) = w^T S w$ для всех $w \in E$. Оно корректно определено, т.к. S - положительно определенная матрица.

Можно проверить, что для любых двух x из рассматриваемой области, будет выполнено условие монотонности относительно такого скалярно-

го произведения.

Заметим, что в случае билинейного гистерезиса все пространство можно разбить на области, рассмотренные выше с точностью до сдвига. Если рассматривать все пространство, то гистерезисный оператор не является монотонным.

4. ОДУ с гистерезисной нелинейностью

В этой главе будут рассматриваться обыкновенные дифференциальные уравнения с гистерезисной нелинейностью и вопросы существования их решений.

4.1. Постановка задачи

Как было указано ранее, нелинейности упруго-пластического типа зачастую являются гистерезисными нелинейностями [10], поэтому в данной главе будут рассматриваться уравнения вида:

$$y' = f(t, y, \mathcal{W}[\mathcal{S}[y]]) \text{ опред. на } (0, t_E), y(0) = y_0, \quad (4.1)$$

где \mathcal{W} – гистерезисный оператор, $(0, t_E)$ – промежуток рассмотрения системы (4.1), \mathcal{S} – оператор суперпозиции вида:

$$\mathcal{S}[y](t) = g(y(t)). \quad (4.2)$$

Например, в случае упруго-пластического осциллятора:

$$\ddot{x} + c\dot{x} + \mathcal{W}[x] = F_1(t). \quad (4.3)$$

Перепишем (4.3) как (4.1). Пусть $x_2 = \dot{x}$, $x_1 = x$, $y = (x_1, x_2)$, $g(x_1, x_2) = x_1$, $F(t) = (0, F_1(t))$, $c_0 = (0, -c)$.

$$\dot{y} = F(t) + c_0 y - \mathcal{W}(g(y)). \quad (4.4)$$

Далее необходимо обсудить критерии существования решения для системы (4.1 - 4.2), которые будут отличаться от рассмотренных ранее.

4.2. Теорема о существовании решения

Теорема 4.2.1. (Пикар-Линделеф; Локальная версия)

Пусть $y_0 \in \mathbb{R}^n$ и функция $f : [0, t_E] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ограничена на ограниченных множествах аргументов, измерима по t и локально липшицева по (y, w) , т.е. для каждого $C > 0$ существует $L > 0$, такой что:

$$\|f(t, y_1, w_1) - f(t, y_2, w_2)\| \leq L(\|y_1 - y_2\| + |w_1 - w_2|), \quad (4.5)$$

где $t \in [0, t_E]$, $y_i \in \mathbb{R}^n$, $w_i \in \mathbb{R}$, $\|y_i\| \leq C$, $|w_i| \leq C$, $i = 1, 2$. Также предположим, что гистерезисный оператор \mathcal{W} и функция $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ таковы, что композиция $\mathcal{W} \circ \mathcal{S}$ отображает $W^{1,1}(0, t_E, \mathbb{R}^n)$ на $C[0, t_E]$ и локально липшицева, используя соответствующие нормы. Тогда (4.1), (4.2) имеет единственное решение $y \in W^{1,\infty}(0, \tau, \mathbb{R}^n)$ для достаточно маленького $\tau > 0$.

Здесь $W^{1,1}(0, t_E, \mathbb{R}^n)$ и $W^{1,\infty}(0, \tau, \mathbb{R}^n)$ – пространства Соболева [10].

Доказательство. Рассмотрим интегрированную версию (4.1):

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s), \mathcal{W}[\mathcal{S}[y]](s)) ds, \quad t \in [0, t_E]. \quad (4.6)$$

Для всех $0 < \tau \leq t_E$ правая часть (4.6) определяет оператор

$$\mathcal{T} : W^{1,1}(0, \tau, \mathbb{R}^n) \rightarrow W^{1,1}(0, \tau, \mathbb{R}^n).$$

Для достаточно малых $\tau > 0$ оператор \mathcal{T} становится оператором сжатия на некотором шаре вокруг функции $y \equiv y_0$. Исходя из условий на f , единственная неподвижная точка оператора \mathcal{T} имеет ограниченную производную почти везде.

□

Замечание 4.2.1. (Частный случай теоремы)

Пусть $y_0 \in \mathbb{R}^n$ и функция f удовлетворяет условиям Теоремы 4.2.1. Если функция $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ локально липшицева, то (4.1), (4.2) имеет единственное решение $y \in W^{1,\infty}(0, \tau, \mathbb{R}^n)$ для некоторого $\tau > 0$, если

$$\mathcal{W} : C[0, t_E] \rightarrow C[0, t_E]$$

локально липшицевый гистерезисный оператор.

Глобальность становится возможным получить, если задать условия роста для функций f, g и оператора \mathcal{W} .

Теорема 4.2.2. (Пикар-Линделеф; Глобальная версия)

Пусть предположения теоремы 4.2.1 или замечания 4.2.1 верны. Пусть f, g, \mathcal{W} растут линейно, т.е. существуют такие константы c_0, c_1, c_2 , что:

$$\|f(t, y, w)\| \leq c_0 + c_1\|y\| + c_2|w|, \quad \|g(y)\| \leq c_0 + c_1\|y\|, \quad (4.7)$$

где все аргументы из соответствующих областей,

$$\|W_f(s)\|_\infty \leq c_0 + c_1\|s\|_\infty, \forall s \in S. \quad (4.8)$$

Тогда (4.1), (4.2) имеет единственное решение $y \in W^{1,\infty}(0, t_E, \mathbb{R}^n)$ для всех $t_E > 0$.

Приведенные выше теоремы верны для большинства гистерезисных эласто-пластических нелинейностей. Билинейный гистерезис, например, задается линейными частями, поэтому условие локальной липшицевости верно очевидно.

5. ОДУ с неавтономными коэффициентами

В этой главе будет рассмотрена система управления. Для нахождения решений таких систем часто применяется частотная теорема, более подробно она описана в работах ([11, 12, 13, 14]). В этой работе будет рассмотрен ее неавтономный вариант.

5.1. Некоторые определения из теории коциклов

В этом параграфе приведены некоторые определения из теории коциклов. Более полное и подробное изложение присутствует в работе [15].

Пусть (Q, d) – метрическое пространство (*пространство внешних возмущений*). Пусть также $(\{\tau^t\}_{t \in \mathbb{R}}, (Q, d))$ – базисная динамическая система на (Q, d) и (M, ρ) – метрическое пространство. Обозначим через $\hat{\rho}$ метрику на декартовом произведении $Q \times M$, то есть

$$\hat{\rho}((q, p), (q', p')) := \sqrt{d^2(q, q') + \rho(p, p')}$$

или

$$\hat{\rho}((q, p), (q', p')) := \max \{d(q, q'), \rho(p, p')\}$$

для любых $(q, p), (q', p') \in Q \times M$.

Определение 5.1.1. *Пара*

$$(\{\varphi^t(q, \cdot)\}_{t \in \mathbb{R}, q \in Q}, (M, \rho)), \quad (5.1)$$

где $\varphi^t(q, \cdot) : M \rightarrow M \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \forall q \in Q$, называется коциклом над данной базисной динамической системой

$$(\{\tau^t\}_{t \in \mathbb{R}}, (Q, d)), \quad (5.2)$$

если:

1. $\varphi^0(q, \cdot) = \text{id}_M \forall q \in Q$;
2. $\varphi^{t+s}(q, \cdot) = \varphi^t(\tau^s(q), \varphi^s(q, \cdot)), \forall t, s \in \mathbb{R} \quad \forall q \in Q$.

Ассоциированная динамическая система $(\{\pi^t\}_{t \in \mathbb{R}}, (W, \hat{\rho}))$, где $W := Q \times M$, $\hat{\rho}$ – метрика на W и $\pi^t : M \rightarrow M$ задана как $w = (q, p) \in W \mapsto \pi^t(q, p) := (\tau^t(q), \varphi^t(q, p)) \quad \forall w \in W$. Эта система называется динамической системой типа косо́го произведения или системой расширения.

Определение 5.1.2. Семейство $\hat{Z} = \{Z(q)\}_{q \in Q}$ называется для коцикла (5.1), (5.2) глобально \mathcal{B} -притягивающим при вытягивании назад, если $\forall q \in Q \quad \forall B \subset M$ (B -ограниченное множество)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\varphi^t(\tau^{-t}, B), Z(q)) = 0.$$

Определение 5.1.3. Коцикл (5.1), (5.2) называется диссипативным, если (5.1), (5.2) имеет глобальное \mathcal{B} -притягивающие при вытягивании назад семейство $\hat{Z} = \{Z(q)\}_{q \in Q}$.

Далее введем понятие потока Бебутова, которое будет использовано в следующем параграфе. Рассмотрим неавтономное дифференциальное уравнение:

$$\dot{y} = f(t, y), \tag{5.3}$$

где $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – гладкое отображение. Введем отображение сдвига для правой части уравнения (5.3) через

$$(s, q) \mapsto \tau^s(q) := f(\cdot + s, \cdot),$$

где $q = f(t, \cdot)$. Пусть также $Q = \overline{\{\tau^t(q) | t \in \mathbb{R}\}}$ – оболочка функции f .

Определение 5.1.4. Пара $(\{\tau^t(q)\}_{t \in \mathbb{R}}, Q)$ называется потоком Бебутова на оболочке Q .

5.2. Условия частотной теоремы

В этом параграфе будет проведена подготовка к применению частотной теоремы для неавтономного случая, описанная в [16].

Рассмотрим систему

$$\dot{y} = A(t)y + B(t)\xi, \tag{5.4}$$

где $y \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^m$, A, B –ограниченные равномерно непрерывные матричные функции на \mathbb{R} , при начальном условии $y(0) = y_0$.

Пусть задана квадратичная форма

$$\mathcal{G}(t, y, \xi) = \frac{1}{2}(y, G(t)y) + 2(y, g(t)\xi) + (\xi, R(t)\xi), \quad (5.5)$$

где (\cdot) –скалярное произведение в $\mathbb{R}^n(\mathbb{R}^m)$, G, g, R –ограниченные равномерно непрерывные матричные функции на \mathbb{R} (размерностей $n \times n, n \times m, m \times m$ соответственно), G, R –симметричны, $R(t)$ –отрицательно определенная, т.е. $R(t) < 0 \forall t \in \mathbb{R}$. Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$\mathcal{I} = - \int_0^{+\infty} \mathcal{G}(s, y(s), \xi(s)) ds. \quad (5.6)$$

Применяя принцип максимума Понтрягина получаем гамильтонову систему уравнений $A^* - gR^{-1}B^*$:

$$J \frac{dz}{dt} = H(t)z, \quad (5.7)$$

где

$$H = \begin{bmatrix} G - gR^{-1}g^* & (A - BR^{-1}g^*)^* \\ A - BR^{-1}g^* & -BR^{-1}B^* \end{bmatrix}, \quad (5.8)$$

$$z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

Для целых $k \geq 1$ и $l \geq 1$ пусть $\mathcal{M}_{k,l} = \{M | k \times l \text{ матрица}\}$.

Тогда $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n,n}$, $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n,m}$, $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n,n}$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n,m}$, $R : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{m,m}$ – ограниченные и равномерно непрерывные матричные функции.

Пусть

$$\mathcal{F}_{k,l} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{k,l} | f \text{ — непрерывна и ограничена}\}. \quad (5.10)$$

Например, $A \in \mathcal{F}_{n,n}$. На этом векторном пространстве рассмотрим топологию непрерывной сходимости на компактных подмножествах \mathbb{R} .

Рассмотрим однопараметрическую группу ограниченных линейных сдви-

гов на $\mathcal{F}_{k,l}$:

$$\tau^t(a)(s) = a(t + s), \quad (5.11)$$

для любых $a \in \mathcal{F}_{k,l}$ и $t, s \in \mathbb{R}$.

Множество $\{\tau^t | t \in \mathbb{R}\}$ задает непрерывный поток Бебутова сдвига аргумента на пространстве $\mathcal{F}_{k,l}$.

Обозначим

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{n,n} \times \mathcal{F}_{n,m} \times \mathcal{F}_{n,n} \times \mathcal{F}_{n,m} \times \mathcal{F}_{m,m}. \quad (5.12)$$

Определим однопараметрическую группу сдвигов на \mathcal{F} через соответствующие группы на $\mathcal{F}_{k,l}$:

$$\tau^t(A', B', G', g', R') = (\tau^t(A'), \tau^t(B'), \tau^t(G'), \tau^t(g'), \tau^t(R')), \quad (5.13)$$

где $t \in \mathbb{R}$. Эта группа задает поток Бебутова на \mathcal{F} .

Заметим, что $q_0 = (A, B, G, g, R) \in \mathcal{F}$. Рассмотрим множество:

$$Q = \overline{\{\tau^t(q_0) | t \in \mathbb{R}\}} \quad (5.14)$$

Заметим, что оно компактно и инвариантно относительно сдвигов в \mathcal{F} . Назовем это множество *оболочкой* q_0 . Рассмотрим функции $\hat{A}, \hat{B}, \hat{G}, \hat{g}, \hat{R}$, заданные для $q = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5) \in Q$:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= q_1(0), \\ \hat{B} &= q_2(0), \\ \hat{G} &= q_3(0), \\ \hat{g} &= q_4(0), \\ \hat{R} &= q_5(0). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Заметим, что $\hat{A}(\tau^t(q_0)) = A(t)$, $\hat{B}(\tau^t(q_0)) = B(t)$, $\hat{G}(\tau^t(q_0)) = G(t)$, $\hat{g}(\tau^t(q_0)) = g(t)$, $\hat{R}(\tau^t(q_0)) = R(t)$.

Итак, (5.4) порождает коцикл φ над потоком Бебутова $\{\tau^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ на оболочке Q . Введем семейство систем:

$$\dot{y} = \hat{A}(\tau^t(q))y + \hat{B}(\tau^t(q))\xi, \quad (5.16)$$

где $q \in Q$. Для $q = q_0$ система (5.16) совпадает с исходной системой (5.4). Аналогично вводится семейство квадратичных форм:

$$\mathcal{G}_q(t, y, \xi) = \frac{1}{2}[(y, \hat{G}(\tau^t(q)y) + 2(y, \hat{g}(\tau^t(q))\xi) + (\xi, \hat{R}(\tau^t(q))\xi)], \quad (5.17)$$

где $q \in Q, \mathcal{G}_{q_0} = \mathcal{G}$ и семейство гамильтоновых систем:

$$J \frac{dz}{dt} = \hat{H}(\tau^t(q))z, \quad (5.18)$$

где

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} \hat{G} - \hat{g}\hat{R}^{-1}\hat{g}^* & (\hat{A} - \hat{B}\hat{R}^{-1}\hat{g}^*)^* \\ \hat{A} - \hat{B}\hat{R}^{-1}\hat{g}^* & -\hat{B}\hat{R}^{-1}\hat{B}^* \end{bmatrix}, \quad (5.19)$$

$$z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.20)$$

Условие А.1. (Частотное условие)

Для каждого $q \in Q$ уравнение (5.18) не имеет нетривиальных решений $z(t)$, ограниченных на всей оси \mathbb{R} .

Пусть $\phi_q(t)$ – фундаментальная матрица системы (5.18), $\phi_q(t) – 2n \times 2n$ -матричная функция, $\phi_q(0) = I_{2n}$, $\pi_q : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ – линейный проектор.

Определение 5.2.1. Будем говорить, что уравнение (5.18) экспоненциально дихотомично над Q , если существуют такие константы $c_1 > 0, c_2 > 0$ и непрерывные проекторы $q \in Q \mapsto \pi_q : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, что:

$$\begin{cases} \|\phi_q(t)\pi_q\phi_q^{-1}(s)\| \leq c_1 e^{-c_2(t-s)}, & t \geq s \\ \|\phi_q(t)(I - \pi_q)\phi_q^{-1}(s)\| \leq c_1 e^{c_2(s-t)}, & t \leq s \end{cases} \quad (5.21)$$

Определение 5.2.2. Множество $Z \subset Q, Z \neq \emptyset$ называется минимальным для динамической системы $(\{\tau^t\}_{t \in \mathbb{R}}, Q)$, если Z является замкнутым инвариантным множеством, которое не содержит собственных подмножеств с такими же свойствами.

Известно, что множество минимально тогда и только тогда, когда любая положительная траектория всюду плотна.

Теорема 5.2.1. (Sacker, Sell) Пусть:

1. Z - компактное минимальное подмножество Q ,
2. Частотное условие (A.1) выполнено для любого $q \in Z$.

Тогда (5.18) экспоненциально дихотомично над Z .

Используем гамильтонову структуру (5.18). Пусть Z – компактное инвариантное подмножество Q , (5.18) имеет над Q семейство проекторов $\{\pi_q\}$. Тогда

$$\text{rank}(\pi_q) = n, \quad \forall q \in Z,$$

т.е. $\text{rank}(\pi_q)$ не зависит от выбора $q \in Z$.

Теорема 5.2.2. (Sacker, Sell) Пусть Z – произвольное минимальное компактное подпространство Q , выполнены условия теоремы (5.2.1) и, следовательно, (5.18) имеет семейство проекторов $\{\pi_q\}$ на каждом Z с постоянным $\text{rank}(\pi_q)$ на Z . Предположим, что этот ранг не зависит от Z . Тогда (5.18) экспоненциально дихотомично над Q .

Как следствие теоремы 5.2.2 при условии A.1 на всем Q имеется экспоненциальная дихотомия, т.е. имеется семейство проекторов $\{\pi_q\}_{q \in Q}$, для которого выполнены неравенства (5.21).

Далее рассмотрим условие осцилляторности.

Определение 5.2.3. n -мерное векторное подпространство $L \subset \mathbb{R}^{2n}$ называется лагранжевым, если для всех векторов $z_1, z_2 \in L$ выполнено:

$$\langle z_1, Jz_2 \rangle = 0,$$

где

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть Λ_n – лагранжев грассманиан, т.е. совокупность всех лагранжевых подпространств L пространств \mathbb{R}^{2n} . Известно, что Λ_n имеет структуру вещественного аналитического многообразия размерности $\frac{n(n+1)}{2}$.

Определение 5.2.4. Подпространство $L_0 = \text{span}\{e_{n+1}, \dots, e_{2n}\}$ называется вертикальным лагранжевым подпространством \mathbb{R}^{2n} .

Предложение 5.2.1. $L_0 \in \Lambda_n$.

Доказательство. Рассмотрим $z_i \in L_0$:

$$z_i = a_{n+1}^i e_{n+1} + \dots + a_{2n}^i e_{2n}, \quad i = 1, 2.$$

$$(0, \dots, 0, a_{n+1}^1, \dots, a_{2n}^1) \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ a_{n+1}^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{2n}^2 \end{pmatrix} = (a_{n+1}^1, \dots, a_{2n}^1, 0, \dots, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ a_{n+1}^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{2n}^2 \end{pmatrix} = 0$$

□

Определение 5.2.5. Множество $\mathcal{C} = \{L \in \Lambda \mid \dim L \cap L_0 \geq 1\}$ называется вертикальным циклом Маслова.

Можно показать, что для любого $q \in Q$ множество

$$L_q = \text{Range}(\pi_q) = \{\pi_q(z) \mid z \in \mathbb{R}^{2n}\}, \quad (5.22)$$

где $\{\pi_q\}$ – семейство линейных проекторов из (5.21), есть лагранжево подпространство. Для этого необходимо ввести следующее определение.

Определение 5.2.6. Вещественная $2n \times 2n$ -матрица M называется симплектической, если

$$M^T J M = J, \quad (5.23)$$

где

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Предложение 5.2.2. L_q из (5.22) – лагранжево подпространство.

Доказательство. Так как система (5.18) гамильтонова, то $\phi_q(t)$ – симплектическая матрица для любых $q \in Q, t \in \mathbb{R}$. Далее, если $z_1, z_2 \in L_q$, то

$$\langle z_1, Jz_2 \rangle = \langle \phi_q(t)z_1, J\phi_q(t)z_2 \rangle \rightarrow 0, t \rightarrow \infty. \quad (5.24)$$

□

Условие А.2. (Условие неосцилляторности) Для каждого $q \in Q$ $L_q \notin \mathcal{C}$, т.е. L_q не принадлежит к вертикальному циклу Маслова.

5.3. Частотная теорема и ее приложение к существованию периодических решений

Теорема 5.3.1. (Yakubovich-Fabbri-Johnson-Núñez)

Пусть выполнены частотное условие А.1 и условие неосцилляторности А.2. Тогда для каждого малого $\delta > 0$ существует непрерывная функция $M_\delta : Q \rightarrow \mathcal{M}_{n,n}$, т.е. в пространстве симметричных $n \times n$ -матриц, таких, что

$$V_q(t, y) = (y, M_\delta(\tau^t(q))y), \quad (5.25)$$

где $y \in \mathbb{R}^n, q \in Q, t \in \mathbb{R}$, удовлетворяет неравенству

$$\frac{d}{dt}V_q(t, y) + 2\mathcal{G}_q(t, y(t), \xi(t)) \leq -\delta(\|y(t)\|^2 + \|\xi(t)\|^2) \quad (5.26)$$

для каждой непрерывной функции $\xi(\cdot)$ и $y(\cdot)$ как решения

$$\dot{y} = \hat{A}y + \hat{B}(t)\xi(t).$$

Кроме того, $M_\delta(q)$ положительно определена для каждого $q \in Q$.

Предложение 5.3.1. Рассмотрим систему (5.4). Пусть $A(t), B(t)$ – T -периодические функции, при этом выполнены частотное условие А.1 и условие неосцилляторности А.2. Тогда построенный коцикл диссипативен и, таким образом, система имеет периодическое решение.

Доказательство. Аналогично работе [13].

□

6. Применение метода усреднения к поиску периодических решений

Для поиска периодических решений эласто-пластической системы в этой главе используется метод усреднения Крылова-Боголюбова([17]). Его применение к уравнениям, содержащим билинейный гистерезис, рассмотрено в ряде работ, например, [2, 18].

6.1. Подготовка к применению метода

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + c_1 \dot{x} + \sigma(x, \mu) = F_1(\tau), \quad (6.1)$$

где σ - билинейный гистерезис (см. параграф 1.4), такой что $\sigma(x, \mu) \rightarrow x$, когда $\mu \rightarrow 0$.

Таким образом, мы рассматриваем только системы вида(6.1) с достаточно маленькими μ и c_0 . Система(1.9) может быть приведена к виду(6.1) с помощью преобразований вида:

$$\frac{K}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{c_0}{\omega_0} = c_1, \quad \omega_0 t = \tau, \quad F_1(\tau) = \frac{F(\tau)}{K}. \quad (6.2)$$

На рис. 6 изображен билинейный гистерезис, где $\alpha = \tan^{-1}(1 - \mu)$.

6.2. Получение системы коэффициентов

Рассмотрим случай, когда возмущение имеет вид

$$F_1(\tau) = x_s \cos(\eta\tau) \quad (6.3)$$

Будем искать периодическое решение(6.1) в виде

$$x(\tau) = R \cos(\theta), \quad (6.4)$$

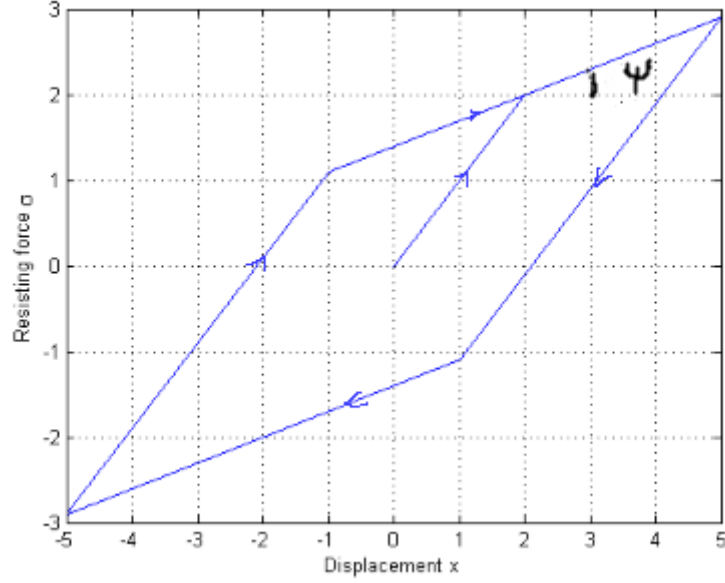


Рис. 6: Билинейный гистерезис ($\mu = 0.7, R(0) = 5, x_0 = 2$)

где $\theta = \eta\tau + \phi$. Пусть

$$R' \cos(\theta) - R\phi' \sin(\theta) = 0 \quad (6.5)$$

Тогда используя средние значения на цикле для производных, возможно получить следующую систему для коэффициентов:

$$\begin{cases} -2\eta R' - c_1\eta R + S(R) = x_s \sin(\phi) \\ -\eta^2 R - 2\eta R\phi + C(R) = x_s \cos(\phi), \end{cases} \quad (6.6)$$

где

$$S(R) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sigma(R \cos(\theta), \mu) \sin(\theta) d\theta, \quad (6.7)$$

$$C(R) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sigma(R \cos(\theta), \mu) \cos(\theta) d\theta. \quad (6.8)$$

Значения вычисляются следующим образом:

$$S(R) = \begin{cases} -\frac{\mu R}{\pi} \sin^2(\theta^*), & R > x_0, \\ 0, & R < x_0, \end{cases} \quad (6.9)$$

$$C(R) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}(\mu\theta^* + (1 - \mu)\pi - \frac{\mu}{2}\sin(2\theta^*)), & R > x_0, \\ R, & R < x_0, \end{cases} \quad (6.10)$$

где $\theta^* = \cos^{-1}[1 - \frac{2x_0}{R}]$. Более подробные вычисления можно найти в работе [2].

6.3. Эксперименты

В этом параграфе будут рассмотрены результаты численного решения системы уравнений (6.6) с помощью пакета MATLAB. Исходные коды можно найти в конце работы.

Решая систему (6.6), находились коэффициенты решения (6.4) и строился график как, например, на Рис.(7).

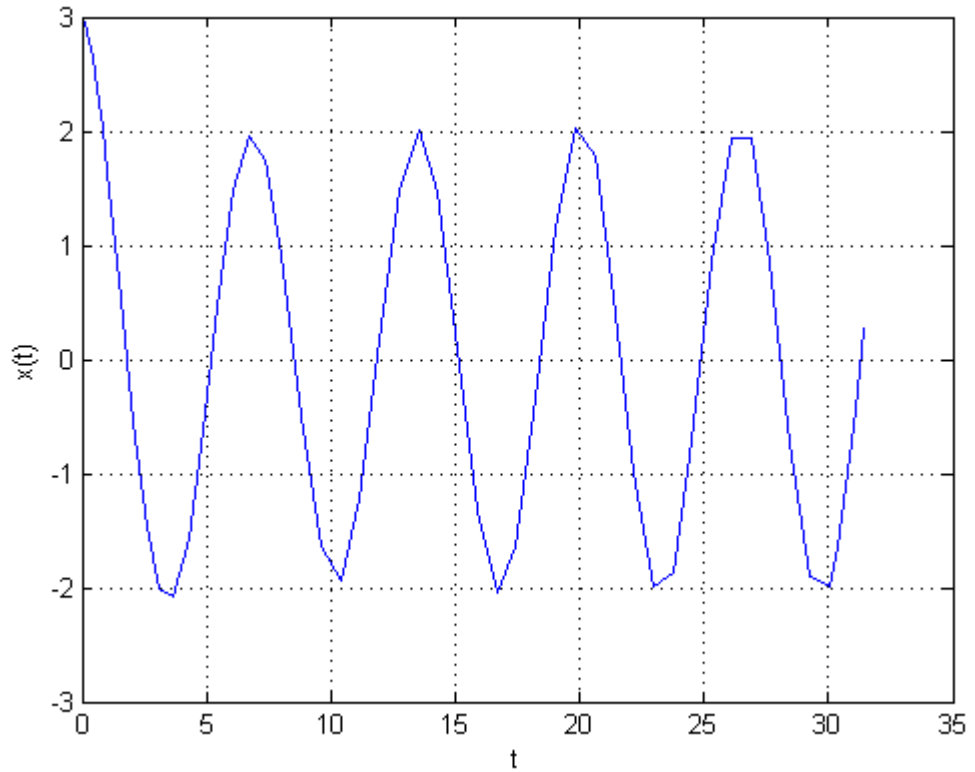


Рис. 7: ($R(0) = 3, \phi(0) = 0, x_0 = 2, \mu = 0.7, x_s = 0.3, c_1 = 0.1, \eta = 1$)

На Рис.(8) показано, как изменяется решение в зависимости от параметра c_1 .

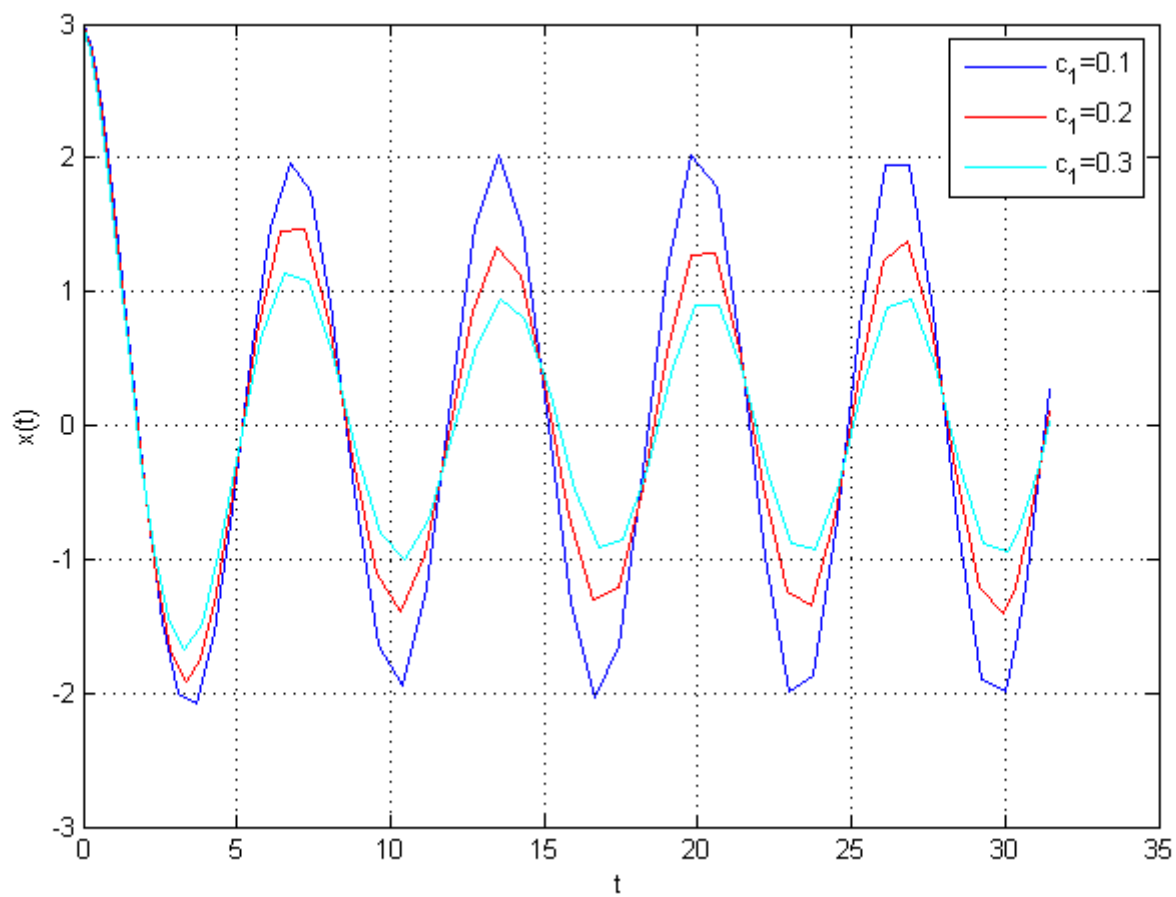


Рис. 8: ($R(0) = 3, \phi(0) = 0, x_0 = 2, \mu = 0.7, x_s = 0.3, \eta = 1$)

Заключение

В рамках данной работы получены следующие результаты:

1. Описаны различные способы задания упруго-пластической нелинейности;
2. Получено представление упруго-пластического осциллятора в виде дифференциального включения и представлена теорема существования решения;
3. Использована теория монотонных операторов для изучения ОДУ с гистерезисной нелинейностью;
4. Построен коцикл для неавтономной системы упруго-пластических деформаций и получены частотные условия существования периодических решений для такой системы;
5. Рассмотрен метод усреднения и показано его применимость к ОДУ с упруго-пластической нелинейностью для численного построения периодических решений.

Исходные коды

В заключительной главе будут приведены исходные коды программ, с помощью которых строились графики и численно решались системы дифференциальных уравнений.

Нелинейность(идеально-жестко-пластический стержень)

```
1 function drawZeid(sigma0, range)
2 Zeid_x(1) = -range;
3 Zeid_y(1) = -sigma0;
4 Zeid_x(2) = 0;
5 Zeid_y(2) = -sigma0;
6 Zeid_x(3) = 0;
7 Zeid_y(3) = sigma0;
8 Zeid_y(4) = sigma0;
9 Zeid_x(4) = range;
10 x_axis_x(1) = -range;
11 x_axis_y(1) = 0;
12 x_axis_x(2) = range;
13 x_axis_y(2) = 0;
14 Yield_x(1) = -range;
15 Yield_y(1) = sigma0;
16 Yield_x(2) = range;
17 Yield_y(2) = sigma0;
18 grid on;
19 axis([-range range -sigma0*1.5 sigma0*1.5]);
20 hold on;
21 plot(Yield_x, Yield_y, 'b');
22 plot(Zeid_x, Zeid_y, 'r', 'LineWidth', 2);
23 plot(x_axis_x, x_axis_y, 'k');
24 xlabel('x');
25 ylabel('\sigma');
26 legend('Yield Plane', 'Nonlinearity');
```

Многозначная функция sign

```
1 function drawSign
2 sign_x(1)=-2;
3 sign_y(1)=-1;
4 sign_x(2)=0;
5 sign_y(2)=-1;
```



```

6 sign_x(3)=0;
7 sign_y(3)=1;
8 sign_y(4)=1;
9 sign_x(4)=2;
10 x_axis_x(1)=-2;
11 x_axis_y(1)=0;
12 x_axis_x(2)=2;
13 x_axis_y(2)=0;
14 grid on;
15 axis([-2 2 -1.5 1.5]);
16 hold on;
17 plot(sign_x,sign_y,'r','LineWidth',2);
18 plot(x_axis_x,x_axis_y,'k');
19 legend('sign(x)');

```

Билинейный гистерезис

Код для построения билинейного гистерезиса:

```

1 function hystDraw(AngleParameter,YieldPlane,MaximumAmplitude)
2 %Drawing the bilinear hysteresis(Displacement/Force ratio is  $\delta = x_e$ 
3 Displacement(1) = 0;
4 ResistingForce(1) = 0;
5 ResistingForce(2) = YieldPlane;
6 Displacement(2) = YieldPlane;
7 Displacement(3) = MaximumAmplitude;
8 ResistingForce(3) = ResistingForce(2) + (MaximumAmplitude - YieldPlane) * (1 -
    AngleParameter);
9 Displacement(4) = Displacement(3) - 2 * YieldPlane;
10 ResistingForce(4) = ResistingForce(3) - 2 * YieldPlane;
11 Displacement(5) = -MaximumAmplitude;
12 ResistingForce(5) = -ResistingForce(3);
13 Displacement(6) = Displacement(5) + 2 * YieldPlane;
14 ResistingForce(6) = ResistingForce(5) + 2 * YieldPlane;
15 Displacement(7) = Displacement(2);
16 ResistingForce(7) = ResistingForce(2);
17 plot(Displacement,ResistingForce);
18 hold on;
19 grid on;

```

Периодические решения по методу усреднения

Система:

```

1 function dy = systemHyst(t,y)
2 frequency=1;

```

```

3 YieldPlane=2;
4 OuterAmplitude=1.7;
5 AngleParameter=0.005;
6 FirstDerivativeParameter=0.1;
7 dy = zeros(2,1);
8 teta=acos(1-(2*YieldPlane)/y(1));
9 if (y(1) < YieldPlane)
10     S = 0;
11 else
12     S = ((-AngleParameter*y(1))/pi)*(sin(teta))^2;
13 end;
14 if (y(1) < YieldPlane)
15     C = y(1);
16 else
17     C = (y(1)/pi)*(AngleParameter*teta + (1-AngleParameter)*pi - (
        AngleParameter/2)*sin(2*teta));
18 end;
19 dy(1) = (OuterAmplitude*sin(y(2)) - S + FirstDerivativeParameter*frequency*y
    (1))/(-2*frequency);
20 dy(2) = (OuterAmplitude*cos(y(2)) - C + (frequency^2) * y(1))/(-2*frequency*y
    (1));
21 end

```

Графики:

```

1 function solution
2 TimePeriod=[0 100*pi];
3 y0=[3 0];
4 [Time,Y]=ode45(@systemHyst, TimePeriod, y0);
5 for i=1:length(Time)
6     Solution(i,1)=Y(i,1)*cos(Time(i)+Y(i,2));
7 end;
8 plot(Time,Solution);
9 grid on
10 legend('Amplitude','Angle');
11 end

```

Список литературы

- [1] Savi M.A, Pacheco P.M.C.L. Nonlinear dynamics of an elasto plastic oscillator with kinematic and isotropic hardening // Journ. of Sound and Vibration. — 1997. — Vol. 207. — P. 207–226.
- [2] Caughey T.K. Sinusoidal excitation of a system with bilinear hysteresis // J. Appl. Mech. — 1960. — Vol. 27, no. 4. — P. 640–643.
- [3] Reitmann V. Convergence in evolutionary variational inequalities with hysteresis nonlinearities // Proc. Equadiff. — 2005. — Vol. 11. — P. 523–532.
- [4] Zeidler E. Nonlinear Functional Analysis and Its Applications. Part 4: Applications to Mathematical Physics. — Berlin : Springer, 1998. — 256 p.
- [5] Финогенко И.А. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — Иркутск : ИДСТУ СО РАН, 2013. — 82 с. — (Серия «неклассические задачи динамики и управления»; вып. 1).
- [6] Толстоногов А.А. Классические решения дифференциальных включений в банаховых пространствах с невыпуклой правой частью // Нелинейные колебания и теория управления. — 1978. — № 2. — С. 17–23.
- [7] Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — М. : Наука, 1985. — 255 с.
- [8] Alber H.D. Materials with Memory: Initial-Boundary Value Problems for Constitutive Equations with Internal Variables. — Berlin : Springer, 1998. — 171 p.
- [9] Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. — М. : Наука, 1978. — 400 с.

- [10] Brokate M., Sprekels J. Hysteresis and Phase Transitions. — New York : Springer, 1996. — 357 p.
- [11] Якубович В.А. Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. I. Абсолютная устойчивость вынужденных колебаний // Автоматика и телемеханика. — 1964. — Т. 25, № 7. — С. 1017–1029.
- [12] Якубович В.А. Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. III. Абсолютная устойчивость систем с гистерезисными нелинейностями // Автоматика и телемеханика. — 1965. — Т. 26, № 5. — С. 753–763.
- [13] Якубович В.А. Периодические и почти периодические предельные режимы регулируемых систем с несколькими, вообще говоря, разрывными нелинейностями // Доклады Академии Наук СССР. — 1966. — Т. 171, № 3. — С. 533–536.
- [14] Якубович В.А., Барабанов Н.Е. Абсолютная устойчивость систем регулирования с одной гистерезисной нелинейностью // Автоматика и телемеханика. — 1979. — № 12. — С. 5–11.
- [15] Райтманн Ф. Динамические системы, аттракторы и оценки их размерности: учеб. пособие. — СПб. : Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2013. — 222 с.
- [16] Fabbri R., Johnson R., Núñez C. On the Yakubovich Frequency Theorem for linear non-autonomous control processes // Discrete and Continuous Dynamical Systems. — 2003. — Vol. 9, no. 3. — P. 677–704.
- [17] Крылов Н.М., Боголюбов Н.М. Введение в нелинейную механику. — НИЦ "РХД", 2004. — 353 с.
- [18] Caughey T.K. Random excitation of a system with bilinear hysteresis // J. Appl. Mech. — 1960. — Vol. 27, no. 4. — P. 649–652.